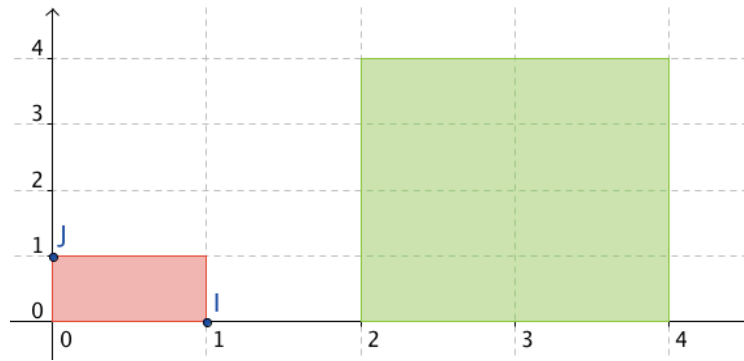


I. Intégrale et aire

1) Unité d'aire



Dans le repère (O, I, J), le rectangle rouge a comme dimension 1 sur 1. Il s'agit du rectangle "unité" qui a pour aire 1 unité d'aire. On écrit **1 u.a.**

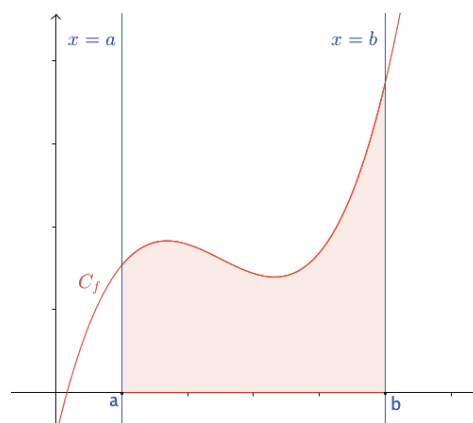
L'aire du rectangle vert est égale à 8 fois l'aire du rectangle rouge.
L'aire du rectangle vert est donc égale à 8 u.a.

Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (le cm^2 par exemple).

2) Définition

Définition : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$.

On appelle **intégrale de f sur $[a ; b]$** l'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



3) Notation

L'intégrale de la fonction f sur $[a ; b]$ se note : $\int_a^b f(x) dx$

Et on lit **"intégrale de a à b de $f(x)dx$ ".**

Cette notation est due au mathématicien allemand *Gottfried Wilhelm von Leibniz* (1646 ; 1716). Ce symbole fait penser à un "S" allongé et s'explique par le fait que l'intégral est égal à une aire calculée comme somme infinie d'autres aires.
Plus tard, un second mathématicien allemand, *Bernhard Riemann* (1826 ; 1866) établit une théorie aboutie du calcul intégral.



Remarques:

2

- a et b sont appelés les bornes d'intégration.

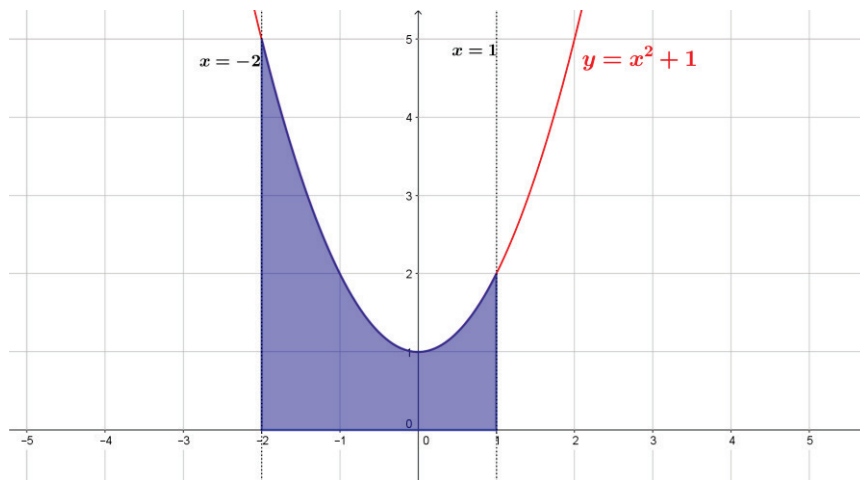
- x est une variable muette. Elle peut être remplacée par toute autre lettre qui n'intervient pas par ailleurs.

Ainsi on peut écrire : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$.

" dx " ou " dt " nous permet de reconnaître la variable d'intégration.

Exemple :

L'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction : $f(x) = x^2 + 1$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$ est l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[-2 ; 1]$ et se note $\int_{-2}^1 (x^2 + 1) dx$.



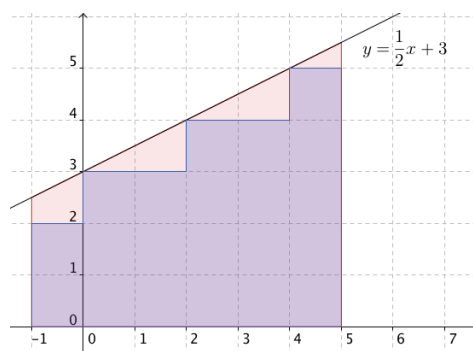
Un logiciel de calcul formel ou une calculatrice peut permettre d'obtenir l'aire cherchée.

Exemple : Exemple de calcul d'une aire par découpage

a) Tracer la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ dans un repère orthonormé.

b) Calculer $\int_{-1}^5 f(x) dx$.

a)



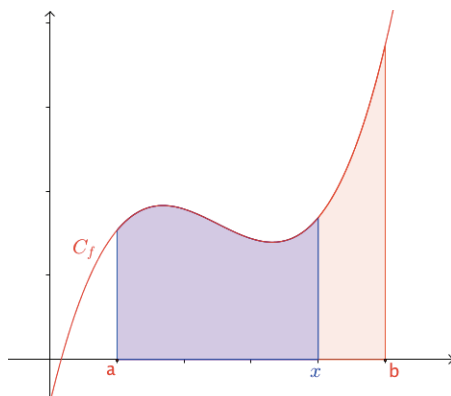
b) Calculer $\int_{-1}^5 f(x) dx$ revient à calculer l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 5$.
Donc par dénombrement, on obtient : $\int_{-1}^5 f(x) dx = 21 \text{ u.a.} + 3 \text{ u.a.} = 24 \text{ u.a.}$



Exercices : n° 3 page 169 + n° 26 page 177

4) Fonction définie par une intégrale

Théorème : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$.
La fonction F définie sur $[a ; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a ; b]$ et sa dérivée est la fonction f .



II. Primitive d'une fonction continue

1) Définition et propriétés

Exemple : On considère les fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto 2x + 3 \quad \text{et} \quad F : x \mapsto x^2 + 3x - 1$$

On constate que : $F'(x) = 2x + 3 = f(x)$.

On dit dans ce cas que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I .
On appelle primitive de f sur I , une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Remarque :

Dans ces conditions, on a l'équivalence :

" F a pour dérivée f " et " f a pour primitive F ".

Exemple : $F(x) = \frac{x^2}{2}$ est une primitive de $f(x) = x$ car $F'(x) = f(x)$ pour tout réel x .

Propriété : f est une fonction continue sur un intervalle I .

Si F est une primitive de f sur I alors pour tout réel C , la fonction $x \mapsto F(x) + C$ est aussi une primitive de f sur I .

Exemple :

En reprenant l'exemple précédent, toute fonction de la forme : $G_C(x) = \frac{x^2}{2} + C$, est une primitive de f puisque la dérivée d'une constante vaut 0.

Propriété : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Remarque : Bien que l'existence étant assurée, la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue. Par exemple, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ ne possède pas de primitive sous forme explicite.

2) Primitive prenant une valeur donnée

Exemple :

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 3$.

Une primitive F de f est $F(x) = x^2 - 3x$. La fonction f n'admet qu'une seule primitive G telle que $G(2) = 1$. En effet, G est de la forme $G(x) = x^2 - 3x + C$, donc $G(2) = 2^2 - 3 \times 2 + C = 1$, et donc $C = 3$. D'où $G(x) = x^2 - 3x + 3$.

3) Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Une primitive	Intervalle
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \geq 0$ entier	$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	$] -\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$	$] 0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

➤ Exercices : n° 7 page 123 + n° 21, 25 et 29 page 127.

4) Linéarité des primitives

Propriété : f et g sont deux fonctions continues sur $[a ; b]$.

Si F est une primitive de f et G est une primitive de g sur $[a ; b]$ alors :

- $F + G$ est une primitive de $f + g$,
- kF est une primitive de kf avec k réel.

5) Fonctions composées avec exponentielle

u est une fonction dérivable sur un intervalle I

Fonction	Une primitive
$u' e^u$	e^u

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I .

a) $f(x) = 5x^4$ sur $I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \frac{3}{x^2}$ sur $I =]0; +\infty[$

c) $f(x) = -\frac{2}{x}$ sur $I =]0; +\infty[$

d) $f(x) = \frac{e^x}{2}$ sur $I = \mathbb{R}$

e) $f(x) = x^3 - 2x$ sur $I = \mathbb{R}$

f) $f(x) = xe^{x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$

g) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2}$ sur $I =]0; +\infty[$

III. Intégrale d'une fonction continue

1) Définition



Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ et F une primitive de la fonction f sur $[a; b]$.

L'intégrale de la fonction f entre a et b est le nombre réel égal à $F(b) - F(a)$:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

REMARQUES :



— La différence $F(b) - F(a)$ se note $\left[F(x)\right]_a^b$. Ainsi, $\int_a^b f(x) dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$

— Le choix de la primitive F n'influe pas sur la valeur de l'intégrale.

En effet, si G est une autre primitive de f sur I , il existe un réel k tel que $G(x) = F(x) + k$ d'où

$$G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$$

— Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ alors l'intégrale $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ est l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

2) Propriétés

• $\int_a^a f(x) dx = 0$

• $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

• Si $a \leq b$ et $f \geq 0$ sur l'intervalle $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

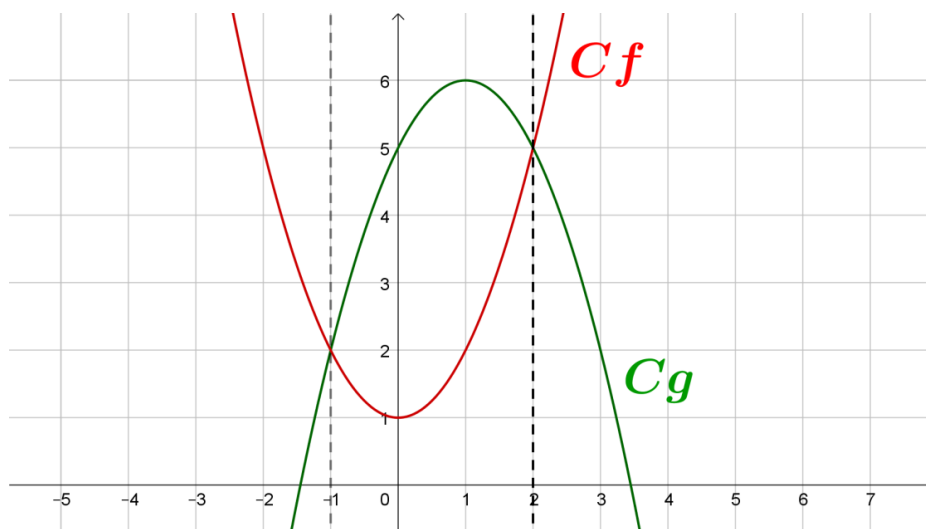


Exercices : n° 72, 73 et 74 page 134 + n° 124 page 141.

IV. Calcul de l'aire entre deux courbes

Exemple : Calculer l'aire délimitée par les courbes de deux fonctions continues et positives

- 1) Colorier l'aire du domaine délimitée par les points $M(x; y)$ tels que :
 $-1 \leq x \leq 2$ et $f(x) \leq y \leq g(x)$
- 2) Exprimer cette aire à l'aide d'une intégrale.
- 3) Calculer cette aire en u.a



V. Propriétés de l'intégrale

- 1) Relation de Chasles :

Propriété :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . a, b et c trois réels de I .

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Démonstration :

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

CQFD

- 2) Linéarité de l'intégrale :

Propriété :

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I . a, b deux réels de I .

a) Pour k réel, $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$

b) $\int_a^b (f(x) \mp g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \mp \int_a^b g(x)dx$

Exemple : Appliquer la linéarité de l'intégrale.

Calculer : $I = \int_1^e \left(e^x - \frac{5}{x} \right) dx$

VI. Valeur moyenne d'une fonction

Définition :

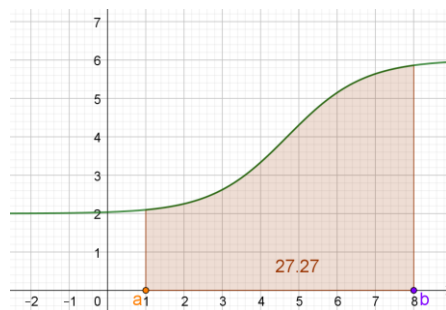
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ avec $a \neq b$.

On appelle valeur moyenne de f sur $[a; b]$ le nombre réel m tel que :

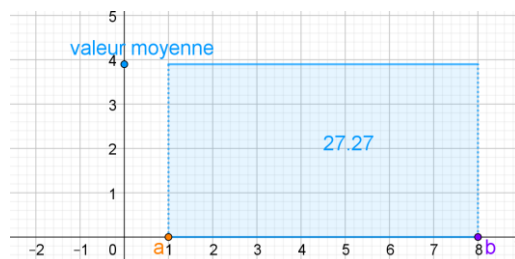
$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Interprétation géométrique :

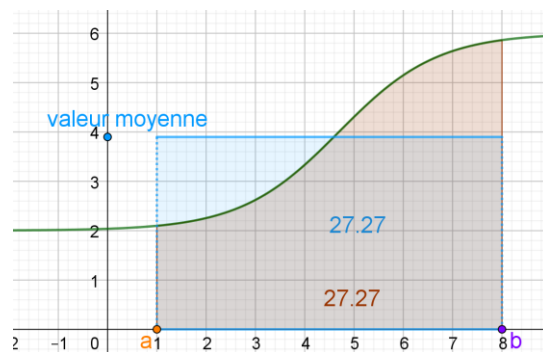
$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \text{ est équivalent à : } m \times (b-a) = \int_a^b f(x) dx$$



$\int_a^b f(x) dx$ Représente l'aire du domaine sous la courbe de f au dessus de l'axe des abscisses et entre les droites verticales passant par a et b



$m \times (b-a)$ Représente l'aire d'un rectangle de côtés m et $(b-a)$



Ces deux aires sont donc égales : $m \times (b-a) = \int_a^b f(x) dx$



Exercice n° 39 et 56 pages 178 et 179.